**TÍNH CHẤT HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU**

**A. Tóm tắt lý thuyết**

1. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại 1 điểm thì

- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm

- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến

- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm

2. Đường tròn nội tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác gọi là đường tròn nội tiếp tam giác, còn tam giác gọi là ngoại tiếp đường tròn

- Tâm của đường tròn nôi tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác của các góc trong tam giác

3. Đường tròn bàng tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với 1 cạnh của tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh còn lại gọi là đường tròn bàng tiếp tam giác

- Mỗi tam giác có 3 đường tròn bàng tiếp tam giác

- Tâm của đưuòng tròn bàng tiếp tam giác góc A là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại B và C hoặc là giao điểm của đường phân giác góc A và đường phân giác ngoài tại B (hoặc C)

**B. Bài tập và các dạng toán**

**Dạng 1: Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai đường thẳng song song, hai đường thẳng vuông góc**

**Cách giải:** Dùng tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau.

**Bài 1:** Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau ở A

a. Chứng minh AO là trung trực của đoạn thẳng BC

b. Vẽ đường kính CD của (O). Chứng minh BD // AO

**Lời giải**

a. Theo tính chất hia tiếp tuyến cắt nhau ta có: AB = AC

 thuộc đường trung trực của BC

Lại có:  thuộc đường trung trực của BC

Vậy AO là đường trung trực của đoạn BC

b. Ta có  (đpcm).

**Bài 2:** Từ 1 điểm A nằm ngoài đường tròn (O; R) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Đường thẳng vuông góc với OB tại O cắt AC tại N. Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt AB tại M

a. Chứng minh rằng tứ giác AMON là hình thoi

b. Điểm A cách O một khoảng là bao nhiêu để MN là tiếp tuyến của đường tròn (O)

**Lời giải**

a. Ta có  là hình bình hành

Lại có  là hình thoi 

b. Để MN là tiếp tuyến của đường tròn (O) thì OH = R hay OA = 2OH = 2R. Vậy OA = 2R

**Bài 3:** Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn cùng phía đối với AB. Từ điểm M trên nửa đường tròn (M khác A, B ) vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt Ax và By lần lượt tại C và D

a. Chứng minh rằng 

b. Chứng minh MC. MD không đổi khi M di động trên nửa đường tròn

c. Cho biết OC = BA = 2R. Tính AC và BD theo R

**Lời giải**

a. Ta có 

b. Theo câu a ta có : 

c. Xét 

Ta lại có : .

**Bài 4:** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ (A, AH), kẻ các tiếp tuyến BD và CE với đường tròn (A) (D, E là các tiếp điểm khác H)

a. Chứng minh rằng: D, A, E thẳng hàng

b. DE là tiếp tuyến của đường tròn với đường kính BC

**Lời giải**

a. Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: thẳng hàng.

****b. Gọi O là trung điểm của BC

 là hình thang ()

 là đường trung bình của hình thang DBEC    
Hay DE là tiếp tuyến của đường tròn 

**Bài 5:** Từ điểm A nằm ngoài đường tròn  kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là các tiếp điểm). Kẻ 

a) Chứng minh tứ giác BOCH là hình thoi

b) Chứng minh ba điểm A, O, H thẳng hàng

c) Xác định vị trí điểm A để H nằm trên (O).

**Lời giải**

b) Ta có A, H, O cùng nằn trên đường vuông góc với BC nên thẳng hàng nhau

c) Để  thì 

**Dạng 2: Chứng minh tiếp tuyến, tính độ dài, tính số đo góc**

**Cách giải:** Ta sử dụng các kiến thức sau

- Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

- Khái niệm đường tròn nội tiếp, bàng tiếp

- Hệ thức lượng về cạnh và góc trong tam giác vuông

**Bài 6:** Cho đường tròn (O). Từ một điểm M ở ngoài (O), vẽ hai tiếp tuyến ME, MF ( E, F là các tiếp điểm ) sao cho . Biết chu vi tam giác MEF là 30cm

a. Tính độ dài dây EF

b. Tính diện tích 

**Lời giải**

a. Theo tính chất hia tiếp tuyến cắt nhau ta có:

 đều 

b. Xét 

**Bài 7:** Cho đường tròn (O; 2cm) các tiếp tuyến MA, MB kẻ từ M đến đường tròn vuông góc với nhau tại M (A, B là các tiếp điểm)

a. Tứ giác MBOA là hình gì? Vì sao

b. Gọi C là điểm bất kỳ thuộc cung nhỏ AB. Qua C kẻ tiếp tuyến với đường tròn cắt MA, MB tại D và E. Tính chu vi tam giác MDE

c. Tính 

**Lời giải**

a. Xét hình chữ nhật AMBO có: MA = MA (tính chất hai tiếp

tuyến cắt nhau là hình vuông .

b. Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: 

Chu vi 

c. 

**Bài 8:** Cho tam giác ABC cân tại A, điểm I là tâm đường tròn nội tiếp, điểm K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác. Gọi O là trung điểm của IK

a. Chứng minh 4 điểm B, I, C, K cùng thuộc 1 đường tròn

b. Gọi (O) là đường tròn đi qua 4 điểm B, I, C, K. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O; OK)

c. Tính bán kính của (O) biết AB = AC = 20cm, BC = 24cm

**Lời giải**

a. Ta có BI, BK là hai tia phân giác của hai góc kề bù 

Tương tự CI và CK là hai tia phân giác hai góc kề bù 

 cùng nằm trên một đường tròn.

b. Ta có 

Ta đi chứng minh 

Lại có :  là tiếp tuyến

c. Ta có AK cắt BC tại H 



**Bài 9:** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi Ax, By là các tia vuông góc với AB (Ax, By ở cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Gọi M là điểm bất kỳ thuộc tia Ax, qua M kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn tại C cắt By tại N

a. Tính 

b. Chứng minh rằng: MN = AM + BN

c. Chứng minh tích AM. BN luôn không đổi khi M di chuyển

d. Gọi D là giao điểm của AN và BM, E là giao điểm của CD và AB. CMR: 

e. CMR: AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp 

f. Gọi H là giao điểm của AC với MO, K là giao điểm của CD với NO. Tứ giác CKOH là hình gì, tính HK?

g. Chứng minh A, M, C, O cùng nằm trên 1 đường tròn, chỉ ra bán kính đường tròn đó

****h. Tìm vị trí của điểm M sao cho  nhỏ nhất

**Lời giải**

a. Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta có : 

b. Ta có: MN = MC + CN = MA + BN (đpcm)

c. Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc vuông trong tam giác vuông ta được 

d.  ( hệ quả Talet)  (Talet đảo). Lại có : 

+) 

e. Gọi I là trung điểm của MN, ta có  AB là tiếp tuyến.

f. Ta có  là hình chữ nhật và HK = OC = R.

g. Ta có CA, CM là hai tiếp tuyến của (O) 

h.  nhỏ nhất khi CD có độ dài nhỏ nhất hay M nằm chính giữa cung AB.

**BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 1:** Cho đường tròn (O) và 1 điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với (O) trong đó B, C là các tiếp điểm

a. Chứng minh đường thẳng OA là trung trực của BC

b. Gọi H là giao điểm của AO và BC. Biết OB = 2cm, OH = 1cm, tính

- Chu vi và diện tích tam giác ABC

- Diện tích tứ giác ABOC

**Lời giải**

b. Áp dụng định lý pytago ta tính được : 

Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông, ta được:



+) Ta có : 

**Cách khác:** Áp dụng hệ thức lượng vè cạnh góc vuông và đường cao trong tam giác vuông, ta có:

+) Ta có: 

**Bài 2:** Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp và K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác

a) Chứng minh rằng bốn điểm B, C, I, K cùng thuộc đường tròn (O; OI) với O là trung điểm của đoạn thẳng IK

b) Chứng minh AC là tiếp tuyến của (O)

c) Biết  tính bán kính của (O).

**Lời giải**

a) Sử dụng tính chất phân giác trong và phân giác ngoài tại 1 điểm ta có:

 cùng thuộc 1 đường tròn tâm O, đường kính IK

b) Chứng minh: 

Từ đó chứng minh được: 

Vậy AC là tiếp tuyến của (O)

c) Áp dụng pytago vào tam giác vuông HAC 

- Xét tam giác vuông COA  (hệ thức lượng trong tam giác vuông).

**Bài 3:** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ đường tròn (A; AH). Từ B, C kẻ các tiếp tuyến BD, CE với (A) trong đó D, E là các tiếp điểm

a. Chứng minh ba điểm A, D, E thẳng hàng

b. Chứng minh 

c. Gọi M là trung điểm của CH. Đường tròn tâm M đường kính CH cắt (A) tại N với N khác H. Chứng minh CN // AM

**Lời giải**

a. Ta có: AB là phân giác của , AC là phân giác của 

b. Theo tính chât hai tiếp tuyến cắt nhau và hệ thức lượng về đường cao và hình chiếu cạnh góc vuông lên cạnh huyền tròn tam giác vuông BAC 

c. Ta có  nội tiếp đường tròn (M) đường kính HC 

Chứng minh AN là tiếp tuyến của (M), do đó 

**Bài 4:** Cho đường tròn (O: R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax, lấy P trên Ax ( AP > R). Từ P kẻ tiếp tuyến PM với (O)

a. Chứng minh rằng bốn điểm A, P, M, O cùng thuộc 1 đường tròn

b. Chứng minh BM // OP

c. Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt tia BM tại N. Chứng minh tứ giác OBNP là hình bình hành

d. Giả sử AN cắt OP tại K; PM cắt ON tại I; PN cắt OM tại J. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

**Lời giải**

a. A, P, M, O cùng nằm trên đường tròn đường kính PO

b. Ta có: 

c. , ta lại có BN // OP nên OPNB là hình bình hành

d. Ta có  , mà  là trực tâm 

Chứng minh được PAON là hình chữ nhật  là trung điểm PO   
Lại có  cân tại I 

Từ (1)(2) thẳng hàng.

**Bài 5:** Cho đường tròn (O:R). Từ A trên (O), kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kỳ ( M khác A), kẻ cát tuyến MNP, gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MB, kẻ

 Gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB. Chứng minh

a. Bốn điểm A, M, B, O cùng thuộc 1 đường tròn

b. Năm điểm O, K, A, M, B cùng thuộc 1 đường tròn

c. OI. OM = R2 và OI. IM = IA2

d. OAHB là hình thoi

****e. O, H, M thẳng hàng.

**Lời giải**

b. Ta có 

c. Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OAM ( hoặc chứng minh tam giác đồng dạng)

d. Chứng minh OAHB là hình bình hành và chú ý:  là hình thoi

e. Chứng minh  thẳng hàng.